PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA - LA MANCHA

JULIO – 2020

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

1º) a) Determina los valores reales del parámetro a para los que no tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calcula razonadamente todos los posibles valores de x, y, z para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - aF_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-a^2-a & 1-a & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2-a^2-a & 1-a \\ a & 0 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}=(a^2+a-2)\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=(a^2+a-2)\cdot(2a-a)=a\cdot(a^2+a-2)=0;\ \ a_1=0;\ \ a^2+a-2=0;$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}\Rightarrow a_2=-2, a_3=1.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R-\{-2,0,1\}}.$$

$b)$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix}.$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & 3+z \\ x-y & 1-z \end{pmatrix}.$$

$$C \cdot D = D \cdot C \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & 3+z \\ x-y & 1-z \end{pmatrix} \Rightarrow y = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3+z & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 & 3+z \\ x-1 & 1-z \end{pmatrix} \Rightarrow x - 1 = 3 + z.$$

Haciendo $z = \lambda$: $x = 4 + \lambda$.

$\underline{Solución: x = 4 + \lambda, y = 1, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$

****

2º) a) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} ax-ay-z=a \\ ax-ay=a \\ ax+2y-z=1 \end{array}\right\}$ en función del parámetro $a \in R$.

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=2$, si es posible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix}=a^2-2a-a^2-a^2=-2a-a^2=-a(2+a)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1=0, a_2=-2.$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a \neq -2 \\ a \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4+4-4+2=6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=-2 \Rightarrow Rang\ M=2, Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=2 \\ 2x-2y=2 \\ 2x+2y-z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado y equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=2 \\ x-y=1 \\ 2x+2y-z=1 \end{array}\right\}$$, Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{2-2-1-2}{2-2-2-2}=\frac{3}{4}. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-2-1+2+2}{-4}=-\frac{1}{4}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-2+4-4+4-4+2}{-8}=0.$$

$$\underline{Solución: x=\frac{3}{4}, y=-\frac{1}{4}, z=0.}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{x-2} & si\ \ x<2 \\ cos\ (\pi x) & si\ \ 2\leq x\leq 3 \\ \frac{L(x-2)}{3-x} & si\ \ x>3 \end{cases}$:

a) Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{-x}}{1+2x-cos\ (x)^2}$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=2$ y $x=3$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=2\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}=\frac{3}{2^--2}=\frac{3}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} cos\ (\pi x)=cos\ (2\pi)=1=f(2) \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2).$$

$$\underline{f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito\ para\ x=2.}$$

$$Para\ x=3\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} cos\ (\pi x)=cos\ (3\pi)=-1=f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{L(x-2)}{3-x}=-1\quad (*) \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3).$$

(*) $\quad \lim\limits_{x\to 3}\frac{L(x-2)}{3-x}=\frac{L1}{3-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x-2}}{-1}=\frac{-1}{3-2}=-1.$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ x=3.}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{-x}}{1+2x-cos\ (x)^2}=\frac{0\cdot e^{-0}}{1+0-cos\ 0}=\frac{0\cdot 1}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1\cdot e^{-x}-x\cdot(-1)\cdot e^{-x}}{0+2-2x\cdot[-sen\ (x)^2]}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x\cdot e^{-x}}{2+2x\cdot sen\ (x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\cdot(1+x)}{2\cdot(1+sen\ x^2)}=\frac{e^{-0}\cdot(1+0)}{2\cdot(1+sen\ 0)}=$$

$$=\frac{1\cdot 1}{2\cdot(1+0)}\Rightarrow \underline{\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{-x}}{1+2x-cos\ (x)^2}=\frac{1}{2}}.$$

****

4º) Sea la función $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$:

a) Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

----

a)

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x^2+1)-(x^2-2x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^2-2-2x^3+4x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=0;\ \ 2(x^2-1)=0;\ \ x^2-1=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1.$$

$$f''(x)=\frac{4x\cdot(x^2+1)^2-2(x^2-1)\cdot[2\cdot(x^2+1)\cdot 2x]}{(x^2+1)^4}=\frac{4x\cdot(x^2+1)-8x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^3}=\frac{4x^3+4x-8x^3+8x}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{12x-4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

$$f''(-1)=\frac{4\cdot(-1)\cdot[3-(-1)^2]}{[(-1)^2+1]^3}=\frac{-4\cdot(3-1)}{(1+1)^3}=\frac{-8}{8}=-1<0 \Rightarrow Máx.\,para\ x=-1.$$

$$f(-1)=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)+1}{(-1)^2+1}=\frac{1+2+1}{1+1}=2 \Rightarrow \underline{Máx.\,relativo: A(-1,2)}.$$

$$f''(1)=\frac{4\cdot 1\cdot(3-1^2)}{(1^2+1)^3}=\frac{4\cdot(3-1)}{(1+1)^3}=\frac{8}{8}=1>0 \Rightarrow Mín.\,para\ x=1.$$

$$f(1)=\frac{1^2-2\cdot 1+1}{1^2+1}=\frac{1-2+1}{1+1}=\frac{0}{2}=0 \Rightarrow \underline{Mín.\,relativo: B(1,0)}.$$

b)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$m=f'(0)=\frac{2(0^2-1)}{(0^2+1)^2}=\frac{-2}{1}=-2.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0+1}{0^2+1}=1 \Rightarrow T(0,1)$.

La fórmula de la recta punto-pendiente es $y-y_0=m\cdot(x-x_0)$, que aplicada al caso presente es:

$$y - 1 = -2 \cdot (x - 0) = -2x \Rightarrow \underline{Recta\ tangente: t \equiv 2x + y - 1 = 0}.$$

La pendiente de la recta normal es inversa y de signo contrario que la pendiente de la tangente: $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

$$y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 0);\ \ 2y - 2 = x \Rightarrow \underline{Recta\ normal: n \equiv x - 2y + 2 = 0}.$$

****

5º) a) Calcula razonadamente la siguiente integral: $I=\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\cdot dx$.

b) Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x)=-x^3+2x^2+3x$ y el eje de abscisas.

----

a)

$$I=\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\cdot dx=\int \frac{3x-2}{(x-1)^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=t \\ 3x-3=3t \\ 3x-2=3t+1 \\ dx=dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{3t+1}{t^2}\cdot dt=$$

$$=\int \left(\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\cdot dt=3\cdot\int \frac{1}{t}\cdot dt+\int t^{-2}\cdot dt=3Lt+\frac{t^{-1}}{-1}+C=3Lt-\frac{1}{t}+C.$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\underline{I=\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\cdot dx=3L|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.}$$

b)

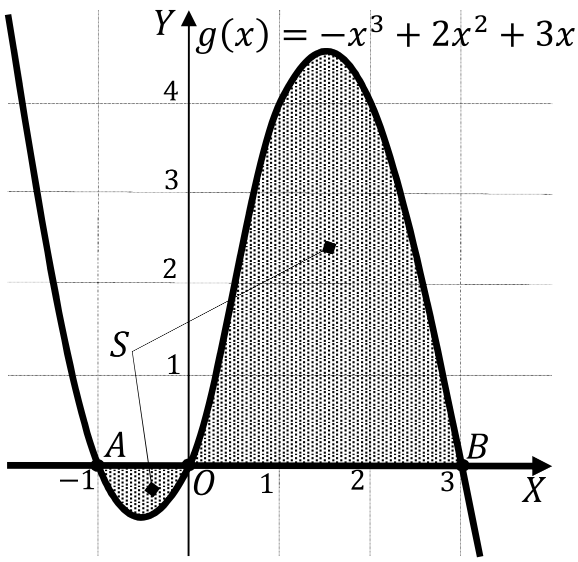
Los puntos de corte con el eje X de la función $g(x)=-x^3+2x^2+3x$ son los siguientes:

$$g(x)=0 \Rightarrow -x^3+2x^2+3x=0;\ -x(x^2-2x-3)=0;\ \ x_1=0.$$

$$x^2-2x-3=0;\ \ x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}=1\pm2 \Rightarrow x_2=-1, x_3=3.$$

Los puntos de corte son $A(-1,0), O(0,0)\ y\ B(3,0)$.

Teniendo en cuenta que $g(1)=-1+2+3=4$ y que $1\in(3,0)$, la representación gráfica, aproximada, de la función es la que se indica en la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^{-1} g(x)\cdot dx+\int_0^3 g(x)\cdot dx=$$

$$=[G(x)]_0^{-1}+[G(x)]_0^3=$$

$$=G(-1)-G(0)+G(3)-G(0)=$$

$$=G(-1)+G(3)-2\cdot G(0).\quad (*)$$

Teniendo en cuenta el valor de $G(x)$, que es el siguiente:

$$G(x) = \int(-x^3 + 2x^2 + 3x) \cdot dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}.$$

$$G(-1) = -\frac{(-1)^4}{4} + \frac{2\cdot(-1)^3}{3} + \frac{3\cdot(-1)^2}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}.$$

$$G(3) = -\frac{3^4}{4} + \frac{2\cdot 3^3}{3} + \frac{3\cdot 3^2}{2} = -\frac{81}{4} + 18 + \frac{27}{2}. \qquad G(0) = 0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, y sustituyendo en (*), la superficie pedida es:

$$S = G(-1) + G(3) - 2 \cdot G(0) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{81}{4} + 18 + \frac{27}{2}\right) - 2 \cdot 0 =$$

$$= 18 - \frac{82}{4} - \frac{2}{3} + \frac{30}{2} = 18 - \frac{41}{2} - \frac{2}{3} + 15 = 33 - \frac{41}{2} - \frac{2}{3} = \frac{198-123-4}{6} = \frac{71}{6}.$$

$$\underline{S = \frac{71}{6}\ u^2 \cong 11{,}83\ u^2.}$$

****

6º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$:

$a)$ Calcula razonadamente el ángulo que forman.

$b)$ Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

$a)$

Un vector normal del plano π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (2, 1, 1)$.

Dos vectores directores de π_2 son $\vec{u} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

Un vector normal del plano π_2 es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de dos de sus vectores directores:

$$\overrightarrow{n_2'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + k - k - 2i = -2i - 2j \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (1, 1, 0).$$

El ángulo que forman dos planos es el mismo que forman sus dos vectores normales.

Por la definición de producto escalar de dos vectores, siendo α el ángulo que forman:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = |\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{(2,1,1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} =$$

$$= \frac{2+1+0}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = 0{,}8660 \Rightarrow \underline{\alpha = arc\ cos\ 0{,}8660 = 30°}.$$

$b)$

Los ejes coordenados determinan las siguientes rectas:

$$Eje\ X \Rightarrow s_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \quad Eje\ Y \Rightarrow s_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \quad Eje\ Z \Rightarrow s_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Los puntos de corte del plano $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas son los puntos de corte del plano con las rectas anteriores:

Corte con el eje X: $\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0 \\ s_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0, 0).$

Corte con el eje Y: $\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0 \\ s_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0).$

Corte con el eje Z: $\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0 \\ s_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow C(0, 0, 2).$

Los vectores que determinan el tetraedro son los siguientes:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 2, 0) - (1, 0, 0)] = (-1, 2, 0).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0, 0, 2) - (1, 0, 0)] = (-1, 0, 2).$

$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(3, -3, 2) - (1, 0, 0)] = (2, -3, 2).$

El volumen del tetraedro que determinan tres vectores es el siguiente:

$$V_{ABCP} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (8 - 6 + 4) = 1.$$

$$\underline{V_{ABCP} = 1\ u^3}.$$

****

7º) Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases}$:

a) Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

b) Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

----

a)

Un punto y dos vectores directores del plano π son los siguientes: $A(-1, 1, 1)$, $\vec{u} = (0, 1, 2)$ y $\vec{v} = (1, a, -1)$.

La expresión general del plano π es: $\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$-(x + 1) + 2(y - 1) - (z - 1) - 2a(x + 1) = 0;$

$-x - 1 + 2y - 2 - z + 1 - 2ax - 2a = 0 \Rightarrow \pi \equiv (2a + 1)x - 2y + z + 2 = 0.$

La recta s y el plano π determinan el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \\ (2a + 1)x - 2y + z = -2 \end{array}\right\}.$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2a+1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2a+1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M’ = 2 ⇛ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M’ = 3 ⇛ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M’ = 3 ⇛ La recta es secante al plano.

Para que $Rang\ M = 2$ tiene que ser $|M| = 0$:

$|M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2a+1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ -2(2a + 1) + 2 = 0;\ -(2a + 1) + 1 = 0;$

$-2a - 1 + 1 = 0 \ \Rightarrow Rang\ M = 2 \Rightarrow a = 0.$

Para $a=0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & b-3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ s\ está\ continida\ en\ el\ plano\ \pi\ para\ a = b = 0.}$$

$b)$

Para $a=0\ y\ b=3$ es $\pi \equiv \begin{cases} x = -1+\mu \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+2\lambda-\mu \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y=-2 \\ z=-3 \end{cases}$.

Dos vectores directores de π son $\vec{u} = (0,1,2)\ y\ \vec{v} = (1,0,-1)$.

Un vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de dos de sus vectores directores:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i+2j-k \Rightarrow \vec{n} = (1,-2,1).$$

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = -2+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{cases}$.

Un vector director de s es $\overrightarrow{v_s} = (2,1,0)$.

El vector director de r tiene que ser perpendicular a los vectores $\vec{n}\ y\ \overrightarrow{v_s}$, por lo cual, tiene que ser linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{v_r} = \vec{n} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j+k+4k-i \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-1,2,5).$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = -1+2\mu \\ z = -8+5\mu \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+8}{5};\ \ r \equiv \begin{cases} 2x-2 = -y-1 \\ 5x-5 = -z-8 \end{cases}.$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 5x+z+3=0 \end{cases}.}$$

****

8º) a) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso:

a_1) ¿Qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

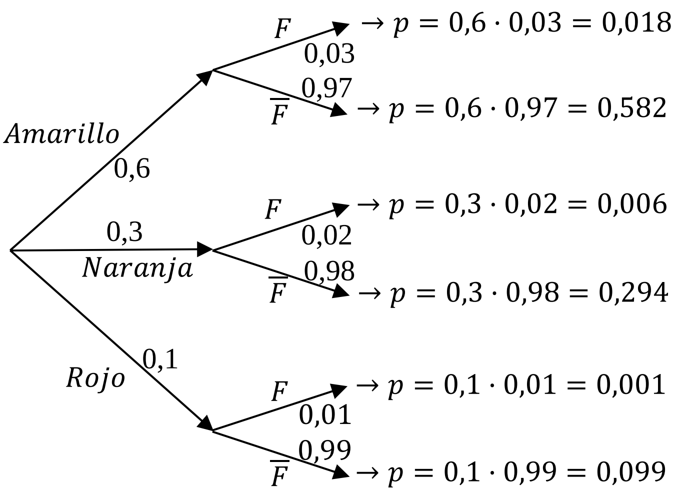
a_2) Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

b) Si en una centralita se reciben 9 avisos:

b_1) ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b_2) ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

a)



a_1) ¿Qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

$$P = P(F) = P(A \cap F) + P(N \cap F) + P(R \cap F) =$$

$$= P(A) \cdot P(F/A) + P(N) \cdot P(F/N) + P(R) \cdot P(F/R) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}018 + 0{,}06 + 0{,}001 = \underline{0{,}025}.$$

a_2) $P = 1 - P(A/\overline{F}) = 1 - \frac{P(A \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = 1 - \frac{P(A) \cdot P(\overline{F}/A)}{1 - P(F)} = 1 - \frac{0{,}6 \cdot 0{,}97}{1 - 0{,}025} =$

$$= 1 - \frac{0{,}582}{0{,}975} = 1 - 0{,}5969 = \underline{0{,}4031}.$$

b)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 9;\ \ p = 0{,}3;\ \ q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$

$b_1)$ $P = P(0) + P(1) + P(2) =$

$$= \binom{9}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^9 + \binom{9}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^8 + \binom{9}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^7 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0404 + 9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}0576 + \frac{9!}{7! \cdot 2!} \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}0824 =$$

$$= 0{,}0404 + 0{,}1556 + \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}0824 = 0{,}1960 + 36 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}0824 =$$

$$= 0{,}1960 + 0{,}2668 = \underline{0{,}4628}.$$

$b_2)$ La probabilidad pedida es igual a la probabilidad de que no haya ningún aviso rojo:

$n = 0;\ \ p = 0{,}1;\ \ q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$

$$P = 1 - P(9) = 1 - \binom{9}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^9 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}3874 = \underline{0{,}3874}.$$

****